BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2013*

УДК 517.95.

К ТЕОРИИ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Э.Г.ГАМИДОВ
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
elsad.hamidov.agdam@mail.ru

В работе получены достаточные условия на коэффициенты операторно-дифференциального уравнения второго порядка параболического типа в гильбертовом пространстве, которые обеспечивают разрешимость некоторых начально-краевых задач в пространстве гладких вектор- функций. Эти условия выражены на языке малости норм оператора в возмущённой части в некоторых пространствах.

Отметим, что при рассмотренной задаче порядок производной в начально-краевой задачи равен порядку уравнения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, вектор-функция, операторно-дифференциальное уравнение

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим параболическое операторно-дифференциальное уравнение

$$u''(t)+\left(p\,A+A_1\right)u'(t)+q\,A^2\,u(t)=f(t),\quad t\in R_+=(0,\infty) \qquad (1)$$

$$u(0)=0,\qquad u''(0)=0\,, \qquad (2)$$

где $f(t),\ u(t)$ – вектор – функции со значениями в H, а коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям:

1) $p>0,\quad q>0$
2) A – положительно определённый самосопряженный оператор
3) $A_1\in L(H_1,H)\bigcap L(H_2,H_1)$

Здесь производные понимаются в смысле теории распределений [1], $L(X,Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов действующих из пространство X в Y. Пусть $H_\gamma=D\left(A^\gamma\right)$ гильбертово пространство с нормой $\|x\|_\gamma,\ x\in D\left(A^\gamma\right),\ \gamma\ge 0,\ H_0=H.$

Определим следующие гильбертовы пространства [1]

$$L_2(R_+;H)=\left\{ g(t):\|g\|_{L_2(R_+;H)}=\left(\int_0^\infty \|g(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}<\infty \right\},$$

$$W_2^m(R_+;H)=\left\{ \begin{array}{l} u(t):u^{(m)},\ A^m u\in L_2(R_+;H),\ \|u\|_{W_2^m(R_+;H)}= \\ =\left(\left\|u^{(m)}\right\|^2_{L_2(R_+:H)}+\left\|A^m u\right\|_{L_2(R_+:H)}\right)^{1/2} \end{array} \right\}$$

При $m=3$ определим подпространство пространства: $W_2^3(R_+;H)$:

$$\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)=\left\{u: u\in W_2^3(R_+;H),\ u(0)=u''(0)=0\right\}$$

Аналогично определяется пространство $W_2^m(R;H)$, где $R=(-\infty,\infty)$. Задача (1), (2) интересна тем, что в граничных условиях (2) порядок производной равен порядку уравнения. Задачи такого типа рассмотрены в работах [2-5].

Определение. Если при любом $f(t)\in W_2^1(R_+:H)$ существует вектор – функция $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) тождественно в R_+, граничные условия (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)\|_{5/2}=0,\qquad \lim_{t\to+0}\|u''(t)\|_{1/2}=0,$$

и оценку $\| u \|_{W_2^3(R_+;H)}\le const\| f\|_{W_2^1(R_1;H)}$, то будем говорить, что задача (1), (2) корректно разрешима в пространстве $W_2^3(R_+;H)$.

В данной работе мы находим условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают корректно разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W_2^3(R_+;H)$.

Обозначим через

$$P_0u=P_0(d/dt)u=-u''+p\,Au'+q\,A^2u,\ \ P_1u=P_1(d/dt)u=A_1u'$$

и

$$Pu=P_0u+P_1u,\quad u\in \overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H).$$

Сперва исследуем корректно разрешимость уравнения $P_0u=f$ при $f\in W_2^1(R_+;H),\ u\in W_2^3(R_+;H)$.

Теорема 1. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ на $W_2^1(R_+;H)$..

Доказательство. Очевидно, что уравнение $P_0(d/dt)u(t)=0$ имеет общее решение из пространство $W_2^3(R_+;H)$

$$u_0(t)=e^{\omega_1 tA}\varphi_1+e^{\omega_2 tA}\varphi_2,$$

где ω_1 и ω_2 корни уравнения $\lambda^2+p\lambda+q=0$, при $\omega_1\neq\omega_2$, а при $\omega_1=\omega_2$, $u_0(t)=e^{\omega_1 t A}\varphi_1+t\,Ae^{\omega_2 t A}\varphi_2$, где $\varphi_1,\varphi_2\in H_{5/2}$, $\operatorname{Re}\omega_1<0$, $\operatorname{Re}\omega_2<0$. Из условия (2) следует, $\varphi_1=\varphi_2=0$, т. е $u_0(t)=0$. Следовательно $Ker\{P_0\}=0$. Теперь покажем, что образ оператора P_0 совпадает с пространством $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$. Так как $f\in W_2^1(R_+:H)$, то его можно продолжить на отрицательной полуось как функция $f_1(t)\in W_2^1(R;H)$ причем [1]

$$\|f_1\|_{W_2^1(R;H)}\leq const\|f\|_{W_2^1(R_+;H)}.$$

Тогда легко проверить, что вектор – функция

$$u_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\xi^2E+i\xi\,pA+qA^2\right)^{-1}\hat{f}_1(\xi)e^{i\xi t},\ t\in R=(-\infty,\infty)$$

принадлежит к пространству $W_2^3(R_+;H)$ и удовлетворяет уравнению $P_0(d/dt)=f\ (t)$ в R_+ тождественно. Здесь $\hat{f}_1(\xi)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $f_1(t)$. Тогда будем искать решение уравнения $P_0u=f$ в виде $u(t)=\xi_1(t)+e^{\omega_1 t A}\varphi_1+e^{\omega_2 t A}\varphi_2$, $t\in R_+$ $(\omega_1\neq\omega_2)$. Случай $\omega_1=\omega_2$ рассматривается аналогично, где $\varphi_1,\varphi_2\in H_{5/2}$, $\xi_1(t)$ есть сужение вектор-функции $u_1(t)$ на $[0,\infty)$, т.е. $u_1(t)=\xi_1(t)$, $t\in[0,\infty)$. Тогда $\xi_1(t)\in W_2^3(R_+;H)$, $\xi_1^{(j)}(0)\in H_{3-j-1/2}$, $j=0,1,2$. Из условия (2) следует, что $\varphi_1+\varphi_2=-\xi_1(0)$, $\omega_1^2\varphi_1+\omega_2^2\varphi_2=-A^{-2}\xi''(0)$. Учитывая, что $\xi_1(0)\in H_{3/2}$, $A^{-2}\xi''(0)\in H_{3/2}$, мы однозначно определим φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1=\frac{1}{\omega_1^2-\omega_2^2}\left[\omega_2^2\,\xi_1(0)-A^{-2}\xi''(0)\right],\quad \varphi_2=\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[\omega_2^2\,\xi_1(0)-A^{-2}\xi''(0)\right]-\xi_1(0).$$

Очевидно, что $\varphi_1,\varphi_2\in H_{5/2}$. Тогда $u_1(t)\in W_2^3(R_+;H)$ и $P_0u=f$. С другой стороны

$$\|P_0\,u\|_{W_2^1(R_+;H)}\leq const\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}.$$

Тогда, утверждение теоремы следует из теоремы Банаха об обратном операторе.

Лемма 1. Пусть $\gamma\in(0,\ p^2)$. Тогда при любом $u\in\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ имеет место равенства

$$\begin{aligned}&\|F_1(d/dt;\gamma;A)u\|^2_{L_2(R_+;H)}+(a_1(\gamma)a_2(\gamma)-a_0(\gamma)-p\,q-p)\|u'(0)\|^2_{3/2}=\\&=\|P_0u\|^2-\gamma\|Au'\|^2_{W_2^1(R_+;H)},\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$a_0(\gamma)=q, \quad a_1(\gamma)=\sqrt{p^2-\gamma}+q, \quad a_2(\gamma)=1+\sqrt{p^2-\gamma} \tag{4}$$

$$F(\lambda;\beta;A)=\lambda^3 E+\alpha_2(\gamma)\lambda^2 A+a_1(\gamma)\lambda A^2+a_0(\gamma)A^2 \tag{5}$$

Доказательство. При $u\in \overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ простые вычисления показывают, что

$$\| F_1(d/dt;\gamma;A)u\|^2_{L_2(R_+;H)}=\|u'''\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left(1+p^2-2q\right)\|Au''\|^2_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+\left(p^2+q^2-2q\right)\|A^2u'\|^2_{L_2(R_+;H)}+q^2\| A^3 u\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left(a_1(\gamma)a_2(\gamma)-a_0(\gamma)\right)\|u'(0)\|^2_{L_2(R_+;H)}. \tag{6}$$

$$\|P_0u\|^2_{W_2^1(R_+;H)}=\left\|u'''+p\,Au''+q\,A^2u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|Au''+p\,A^2u'+q\,A^3u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\|u'''\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left(1+p^2-2q\right)\|Au''\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left(p^2+q^2-2q\right)\|A^2u'\|^2_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+q^2\left\|A^3u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}-\left(p\,q+p\right)\|u'(0)\|^2_{3/2}. \tag{7}$$

Сравнивая равенства (6) и (7), получаем верность равенства (5).

Замечание. Легко видеть, что операторный пучок $F_1(\lambda;\beta;A)$ представляется в виде:

$$F_1(\lambda;\gamma;A)=(\lambda E+A)(\lambda E-\omega_1(\gamma)A)(\lambda E-\omega_2(\gamma)A),\ \gamma\in\left(0,p^2\right),$$

причем $\mathrm{Re}\,\omega_1(\gamma)<0$, $\mathrm{Re}\,\omega_2(\gamma)<0$, при $\gamma\in\left(0,p^2\right)$. Из теоремы 1 и из теоремы о промежуточных производных следует, что число

$$N_1=\sup_{0\neq u\in \overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)}\|Au'\|_{W_2^1(R_+;H)}\cdot\|P_0u\|^{-1}_{W_2^1(R_+;H)}$$

есть норма в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ эквивалентной нормой $\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}$. Теперь найдём точное значение нормы N_1.

Лемма 2. Норма

$$N_1=\left(p^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{(q+1)^2+4p(q+1)}-(q+1)\right)^2\right)^{-1/2}. \tag{8}$$

Доказательство. Используя методику работы [6] из леммы 1 получаем, что если уравнение

$$a_1(\gamma)a_2(\gamma)-a_0(\gamma)-\left(p\,q+p\right)=0 \tag{9}$$

не имеет решение из интервала $\left(0,p^2\right)$, то $N_1=p^{-1}$. А в обратном случае, если γ_0 – есть наименьшее из корней уравнения (9) из интервала $\left(0,\ p^2\right)$, то $N_1=\gamma_0^{-1/2}$.

Поэтому мы должны решать уравнение (9) относительно γ; т.е

$$\left(1+\sqrt{p^2-\gamma}\right)\left(q+\sqrt{p^2-\gamma}\right)-q-p\,(q+1)=0$$

или $p^2-\gamma+(q+1)\sqrt{p^2-\gamma}-p(q+1)=0$. Отсюда имеем, что

$$\sqrt{p^2-\gamma}=\frac{1}{2}\left(-(q+1)+\sqrt{(q+1)^2+4(q+1)p}\right),$$

т.е.

$$\gamma_0=p^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{(q+1)^2+4(q+1)p}-(q+1)\right)^2$$

Очевидно, что $\gamma_0<p^2$. Покажем, что $\gamma_0>0$. Из равенства

$$\gamma_0=\left(p+\frac{1}{2}\left(\sqrt{(q+1)^2+4(q+1)p}-(q+1)\right)\right)\left(p-\frac{1}{2}\left(\sqrt{(q+1)^2+4(q+1)p}-(q+1)\right)\right)$$

видно, что первый множитель больше нуля. С другой стороны, $\left(p+\frac{1}{2}(q+1)\right)^2>\frac{1}{4}(q+1)^2+4\,p\,(q+1)$. Поэтому второй множитель тоже больше нуля. Таким образом, $\gamma_0\in\left(0,p^2\right)$. Поэтому $N_1=\gamma_0^{-1/2}$. Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)-3), причем

$$\max\left(\|A_1\|_{H_1\to H},\|A_1\|_{H_2\to H_1}\right)<\left(p^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{(q+1)^2+4p(q+1)}-(q+1)\right)^2\right)^{1/2}$$

Тогда задача (1), (2) корректно разрешима в пространстве $W_2^3(R_+;H)$.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде уравнений $Pu=P_0u+P_1u=f$, где $f\in W_2^1(R_+;H)$, $u\in \overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$. По теореме 1, P_0^{-1} обратим. Поэтому после замены $P_0u=\omega$ мы получаем уравнение $\omega+P_1P_0^{-1}\omega=f$ в пространстве $W_2^1(R_+;H)$. С другой стороны

$$\begin{aligned}
&\left\|P_1P_0^{-1}\omega\right\|_{W_2^1(R_+;H)}=\|P_1u\|_{W_2^1(R_+;H)}=\|A_1u'\|_{W_2^1(R_+;H)}=\\
&=\left(\|A_1u''\|^2_{L_2(R_+;H)}+\|A\,A_1u'\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}=\\
&=\left(\left\|A_1A^{-1}Au''\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|A\,A_1\,A^{-2}A^2u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}\le\\
&\le\max\left(\|A_1\|_{H\to H_1},\|A_1\|_{H_2\to H_1}\right)\left(\|Au''\|_{L_2(R_+;H)}+\|A^2u'\|_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}=\\
&=\max\left(\|A_1\|_{H\to H_1},\|A_1\|_{H_2\to H_1}\right)\|Au'\|_{W_2^1(R_+;H)}=\max\left(\|A_1\|_{H\to H_1},\|A_1\|_{H_2\to H_1}\right)\cdot\\
&\cdot N_1\|P_0u\|_{W_2^1(R_+;H)}<q\|\omega\|_{W_2^1(R_+;H)}.
\end{aligned}$$

Так как $q=\max\left(\|A_1\|_{H\to H_1},\|A_1\|_{H_2\to H_1}\right)N_1<1$, то оператор $E+P_1P_0^{-1}$ обратим в пространстве $W_2^1(R_+:H)$. Поэтому $u=P_0^{-1}\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$ и $\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}\le const\|f\|_{W_2^1(R_+;H)}$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л, Мадженес Э. Неоднородные краевые задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С. Гамидов Э.Г. О нормах операторов промежуточных производных в пространстве гладких вектор-функций и их приложения. Доклад НАН Азербайджана: 2011, № 3, TL XVII, с 9-14.
3. Гамидов Э.Г. Оценки промежуточных производных в пространствах типа Соболева и их применения. Автореф. диссер. на соиск. канд. физ. мат. наук, Баку, 2006, 16 с.
4. Гамидов Э.Г. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в пространстве гладких вектор-функций. Вестник Бакинского Университета, серя физико-математических наук, № 2. 2007, с 67-74.
5. Гамидов Э.Г. О разрешимости одной краевой задачи в пространстве гладких вектор-функций. ADPU-nun Xəbərləri, (təbiət elmləri seriyası) Bakı, ADPU, 2012, № 2, с 17-20.
6. Гамидов Э.Г. О гладких решениях одного типа параболического операторно-дифференциального уравнения второго порядка. ADPU-nun Xəbərləri, (təbiət elmləri seriyası) Bakı, ADPU, 2012, № 4, с 22-26.
7. Mirzoev S.S. On the norms of operators of intermediate derivatives //Transactions of NAS Azerbaijan, rer . of. phis. techn, math. sciences, 2003, v. XXIII, №1, p 93-102.

HAMAR VEKTOR FUNKSİYALAR FƏZASINDA BAŞLANĞIC - SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

E.H.HƏMİDOV

XÜLASƏ

İşdə hilbert fəzasında ikinci tərtib parabolik operator-diferensial tənlik üçün qoyulmuş bir başlanğıc - sərhəd məsələsinin həll olunmasını təmin edən kafi şərtlər verilmişdir. Bu şərtlər operator - diferensial tənliyin həyəcanlanmış hissəsindən operatorun müəyyən fəzalarda normalarının kiçikliyi dilində verilmişdir. Baxılan sərhəd məsələsində sərhəd şərtindəki törəmənin dərəcəsi tənliyin dərəcəsi ilə eynidir.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, vektor-funksiya, operator-diferensial tənlik

ON THE SOLUTİON OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN SMOOTH VECTOR FUNCTİONS

E.H.HAMİDOV

SUMMARY

Sifficient conditions on the coefficients of parabolic second order operator-differential equations in the Hilbert space have been obtained.

Key words: Hilbert space, vector-functions, operator-differential

Поступило в редакцию: 22.05.2013 г.
Подписано к печати: 17.10.2013 г.